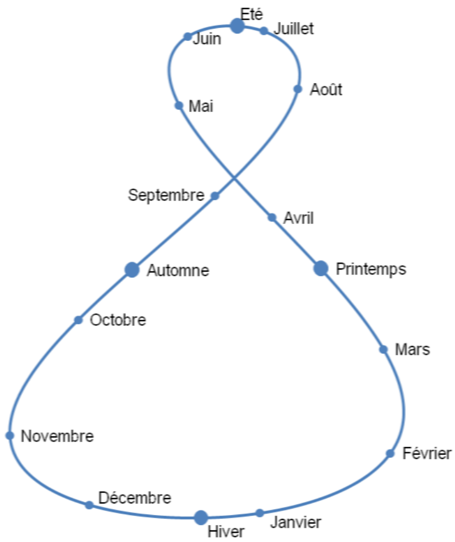
L'octographe

Traceur mécanique de courbe en huit

Francis Ziegeltrum

1. Introduction

On appelle courbe en huit la figure tracée dans le ciel par les différentes positions du Soleil relevées à une même heure et depuis un même lieu au cours d'une année calendaire.
La courbe en huit résulte de la différence entre le temps solaire moyen et le temps solaire vrai- c'est à dire l'équation du temps- et de la déclinaison du Soleil. Inversement, tout point de la courbe en huit permet de connaitre, pour une date donnée et une heure donnée, la différence entre l'heure solaire et l'heure légale, ainsi que la position de la Terre sur son orbite autour du Soleil. On peut donc imaginer d'intégrer, dans une horloge mécanique, une complication permettant d'indiquer de façon continue la marche du Soleil l'année durant.
Le présent document explique la mise au point d'un tel mécanisme, je l'ai nommé octographe.

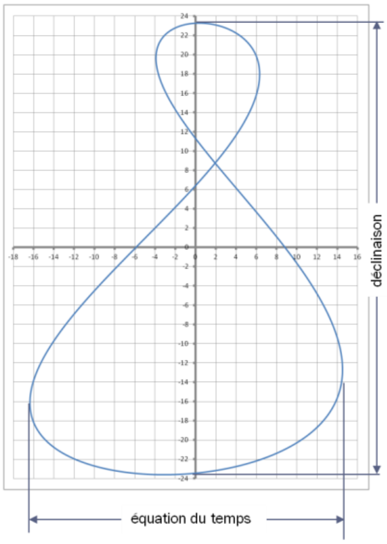


2. Paramétrage de la courbe en huit

Il existe de nombreuses formules simplifiées, plus ou moins précises, permettant de calculer l'équation du temps (E) et la déclinaison du Soleil (δ). Les formules ci-dessous ont, à mon avis, une précision suffisante pour l'usage que l'on veut en faire.

$$\begin{cases} E_{(S)} = 450{,}68 \sin\left(\dfrac{2\pi}{365} J - 0{,}026903\right) + 595{,}40 \sin\left(\dfrac{4\pi}{365} J + 0{,}352835\right) \\ \delta_{(°)} = 23{,}429 \sin\left(\dfrac{2\pi}{370{,}84} J - 1{,}3616\right) + 0{,}242 \sin\left(\dfrac{4\pi}{360{,}15} J - 1{,}93\right) \\ 0 \leq J \leq 365 \; jours \end{cases}$$

La courbe en huit se trace donc en prenant comme abscisse l'équation du temps (E) et comme ordonnée la déclinaison du soleil (δ).



On voit bien que les formules, telles qu'elles sont présentées ci-dessus, sont bien trop compliquées pour être transformées en pièces mécaniques.
Par une première simplification, on supprime le terme $0{,}242 \sin\left(\frac{4\pi}{360{,}15} J - 1{,}93\right)$ qui est négligeable par rapport au premier terme de la formule de la déclinaison.

Les formules ont comme variable le nombre de jours à partir du premier janvier. En mécanique, il est plus usuel de travailler avec des angles, en degré, entre 0 et 360°. En effectuant ce changement de variable les formules s'écrivent :

$$\begin{cases} E_{(S)} = 450{,}68\sin(t - 1{,}5203) + 595{,}40\sin(2t + 19.939) \\ \delta_{(°)} = 23{,}429\sin(t - 75{,}7335) \\ 0 \leq t \leq 360° \end{cases}$$

Ou encore :

$$\begin{cases} E_{(min)} = 7{,}5113\sin(t - 1{,}5203) + 9{,}9233\sin(2t + 19{,}939) \\ \delta_{(°)} = 23{,}429\sin(t - 75{,}7335) \\ 0 \leq t \leq 360° \end{cases}$$

En choisissant des échelles 1 unité =1° pour la déclinaison et 1 unité = 1min pour l'équation du temps et en effectuant une dernière simplification n'affectant que très légèrement la précision, la courbe en huit peut être définie par:

$$\begin{cases} E \simeq 75\sin(t - 1{,}5) + 100\sin(2t + 20) \\ \delta \simeq 234\sin(t - 75{,}5) \\ 0 \leq t \leq 360° \end{cases}$$

Une dernière transformation $u = t - 1{,}5 \Leftrightarrow t = u + 1{,}5$ permet de simplifier les formules pour la mise au point de l'octographe :

$$\begin{cases} E = 75\sin(u) + 100\sin(2u + 23) \\ \delta = 234\sin(u - 74) \\ 0 \leq u \leq 360° \end{cases}$$

3. Conception de l'octographe

La courbe en huit n'est autre que la combinaison de deux mouvements périodiques, l'un agissant suivant les abscisses l'autre suivant les ordonnées. Il est donc logique de concevoir deux mécanismes distincts, l'un générant l'équation du temps, l'autre la déclinaison.

Pour ce faire, on décompose l'équation paramétrée de la courbe en huit :

$$\begin{cases} E = 75\sin(u) + 100\sin(2u + 23) \\ \delta = 234\sin(u - 74) \\ 0 \leq u \leq 360° \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_E = 75\cos(u) + 100\cos(2u + 23) \\ Y_E = 75\sin(u) + 100\sin(2u + 23) \\ 0 \leq u \leq 360° \end{cases}$$

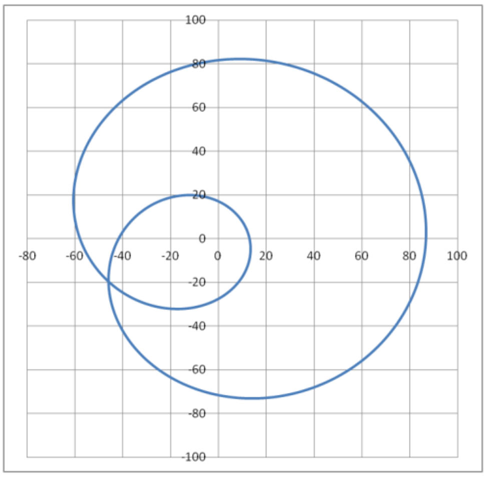
$$\begin{cases} X_\delta = 0 \\ Y_\delta = 234\sin(u - 74) \\ 0 \leq u \leq 360° \end{cases}$$

On obtient ainsi 2 courbes paramétrées distinctes.

Système d’engrenages équation du temps :

La courbe paramétrée d’équation $\begin{cases} X_E = 75\cos(u) + 100\cos(2u+23) \\ Y_E = 75\sin(u) + 100\sin(2u+23) \\ 0 \leq u \leq 360° \end{cases}$ est une épitrochoïde dont l’équation générale est de la forme :

$$\begin{cases} x(\theta) = (R+r)\cos\theta - d\cos\left(\dfrac{R+r}{r}\theta\right) \\ y(\theta) = (R+r)\sin\theta - d\sin\left(\dfrac{R+r}{r}\theta\right) \end{cases}$$

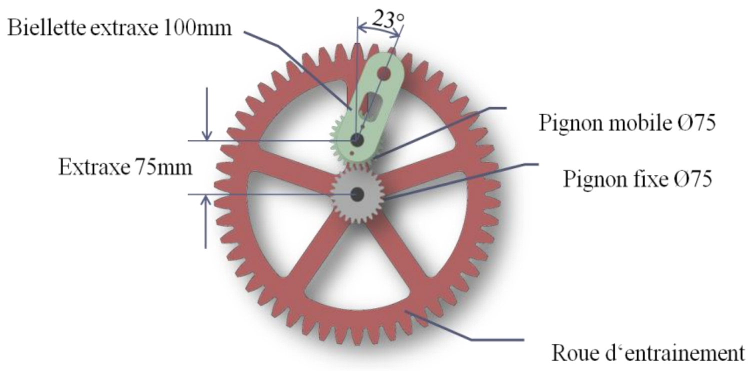


Or si $R = r$ alors:

$$\begin{cases} x(\theta) = 2r\cos\theta - d\cos(2\theta) \\ y(\theta) = 2r\sin\theta - d\sin(2\theta) \end{cases}$$

L’épitrochoïde peut être matérialisée par un système d’engrenages comprenant un pignon fixe et un planétaire de même rayon r roulant autour du pignon. L’extrémité d’une biellette liée au planétaire et d’une longueur d décrit une épitrochoïde.

Le système d’engrenage de l’équation du temps est donc de la forme suivante:



Système d’engrenages déclinaison :

La courbe paramétrée d’équation $\begin{cases} X_\delta = 0 \\ Y_\delta = 234\sin(u-74) \\ 0 \leq u \leq 360° \end{cases}$ est une hypocycloïde dont l’équation générale est de la forme :

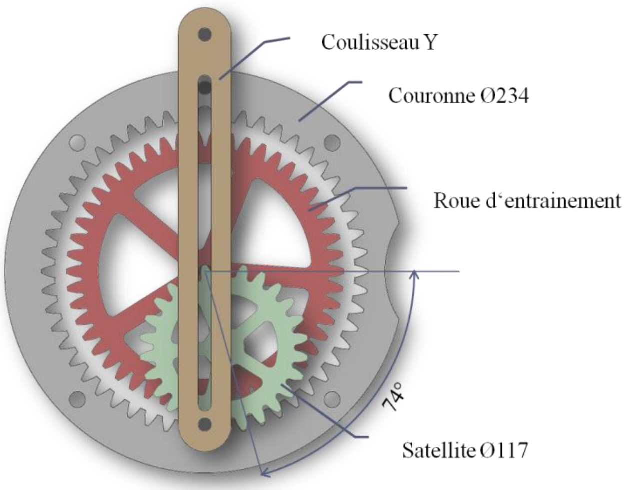
$$\begin{cases} x(\theta) = (R-r)\cos\theta + r\cos\left(\dfrac{R-r}{r}\theta\right) \\ y(\theta) = (R-r)\sin\theta - r\sin\left(\dfrac{R-r}{r}\theta\right) \end{cases}$$

Si $R = 2r$ alors l'équation devient:

$$\begin{cases} x(\theta) = 2r\cos\theta = 2r\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ y(\theta) = 0 \end{cases}$$

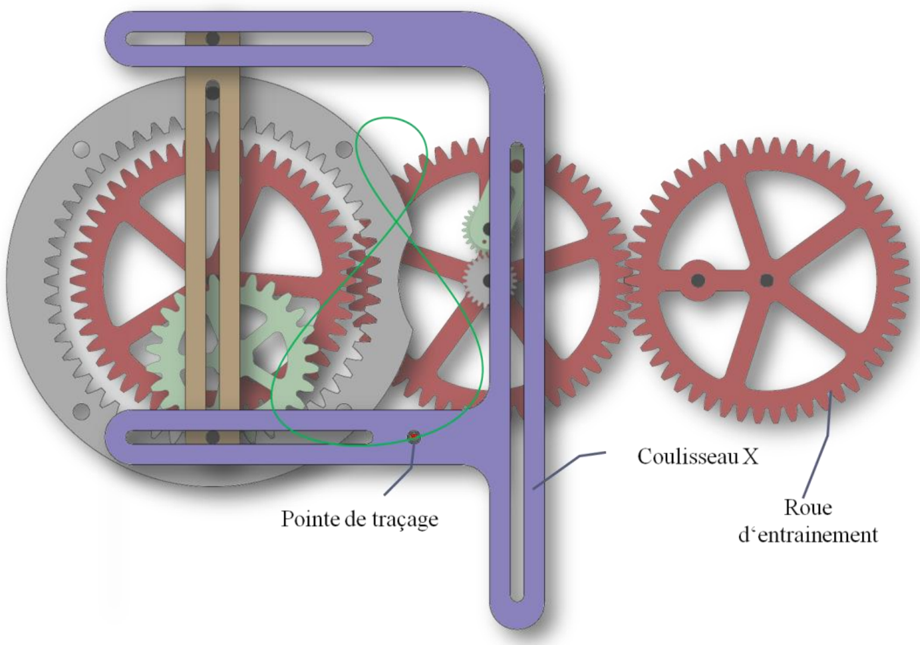
L'hypocycloïde (dans ce cas réduite à un segment) peut être matérialisée par un système d'engrenages appelé engrenages de la Hire ou de James White comprenant une couronne, une roue d'entrainement et un pignon de diamètre égal au rayon de la couronne.
Ce système transforme un mouvement circulaire en un mouvement linéaire et alternatif.

Le système d'engrenages de la déclinaison est donc de la forme suivante:



L'octographe :

Pour terminer la conception de l'octographe, il reste à réaliser la liaison entre les 2 systèmes d'engrenages capable d'éliminer les composantes de mouvement inutiles. Ceci peut se faire à l'aide du coulisseau X. On complète le mécanisme en rajoutant une roue d'entrainement et une pointe de traçage.



4. Conclusion

L’octographe renoue le lien entre la mécanique céleste et la mécanique horlogère. La simplicité de son mécanisme et la précision de son tracé lui permettent de trouver sa place dans une horloge indiquant l’heure locale et le décalage par rapport à l’heure solaire. Puisse-t-il un jour inspirer un audacieux horloger !

En attendant, une vidéo montre l’octographe en action sur ma page perso : http://francis.ziegeltrum.perso.sfr.fr.

5. Sources d’inspiration

La marche du Soleil- Un affichage naturel de l’équation du temps-Ilan Vardi
Bulletin Suisse de Chronométrie n° 62 Décembre 2009
http://www.ssc.ch/d2wfiles/document/2028/5076/0/Marche%20soleil_vardi.pdf

Harmonograph circular design par Robert J. Whitaker
http://lmba.math.univ-brest.fr/perso/yves.coudene/harmonograph.pdf

Mechanisms for the generation of plane curves par I.I.Artobolevskii
http://www.iri.upc.edu/people/thomas/deposit/Artobolevskii.pdf

Straight Line and its construction
http://mathforum.org/mathimages/index.php/Straight_Line_and_its_construction

Formules de calcul de la déclinaison et l'équation du temps
http://perso.limsi.fr/Individu/bourdin/master/Calculs_astronomiques_simples.pdf